PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Soit α un nombre réel > 0. Pour tout x réel > 0, on pose :

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\, du.$$

I

1° Montrer que l'intégrale ci-dessus est convergente.

2° Calculer $F_1(x)$ et $F_{1/2}(x)$.

3° Trouver la limite, quand $x > 0$ tend vers 0, de $F_\alpha(x)$.

4° Montrer que, sur l'intervalle $x > 0$, la fonction $x \longmapsto F_\alpha(x)$ est la seule solution de l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \qquad x\frac{dy}{dx} + \alpha y = \frac{1}{1+x}$$

qui ait une limite finie quand la variable $x > 0$ tend vers 0.

5° *a*. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$F_\alpha(x) \geqslant \frac{1}{\alpha(1+x)}.$$

b. Montrer que, sur l'intervalle $x > 0$, la fonction $x \longmapsto F_\alpha(x)$ est décroissante.

6° *a*. Si $\alpha > 1$, montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$F_\alpha(x) \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)x}.$$

b. Si $0 < \alpha < 1$, montrer qu'il existe un nombre réel c_α, ne dépendant que de α, tel que, pour tout $x > 0$, on ait :

$$F_\alpha(x) \leqslant \frac{c_\alpha}{x^\alpha}.$$

7° *a*. Trouver une relation simple entre $F_\alpha(x)$ et $F_{\alpha+1}(x)$.

b. En déduire la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $x\,F_{\alpha+1}(x)$.

II

1° b étant un nombre réel > 0, calculer l'intégrale :

$$\int_0^b \frac{dt}{1+t^3}.$$

2° On pose $\alpha = 1/3$ et $x = 1/8$. Dans l'intégrale définissant $F_\alpha(x)$, avec $\alpha = 1/3$, effectuer le changement de variable $u = t^3$. En déduire que

$$F_{1/3}(1/8) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \operatorname{Log} 3.$$

3° On suppose que α est un nombre rationnel p/q, où p et q sont deux entiers > 0. Montrer que, dans ce cas, par un changement de variable convenable dans l'intégrale définissant $F_\alpha(x)$, on ramène la détermination de $F_{p/q}(x)$ au calcul de la primitive d'une fraction rationnelle.

4° *a*. Montrer que, si q est un entier positif impair, on a pour tout $x > 0$:

$$\sum_{p=1}^{p=q} (-1)^{p+1}\, x^{p/q}\, F_{p/q}(x) = q \operatorname{Log}\left(1 + \sqrt[q]{x}\right).$$

b. Calculer $F_{2/3}(1/8)$.

. . . /. . .

Concours E.N.S.I. Programme "P" 1978

M 89

III

1° Montrer que, si $|x| < 1$, la série :

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{x}{1+\alpha} + \frac{x^2}{2+\alpha} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n+\alpha} + \ldots$$

converge, et que sa somme est solution de l'équation différentielle (E_α).

En déduire une expression de cette somme pour $0 < x < 1$.

2° Quelles sont les sommes des séries :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{8^n(3n+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{8^n(3n+2)} \ ?$$

IV

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions f à valeurs réelles, définies et continues sur l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des nombres réels ≥ 0. A toute $f \in E$, on associe la fonction y, qu'on notera $T_\alpha f$, définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$y(x) = (T_\alpha f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} \displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\, du\ , & \text{si} \quad x > 0\ ; \\ \dfrac{1}{\alpha} f(0)\ , & \text{si} \quad x = 0\ . \end{cases}$$

1° Montrer que cette définition a un sens, et que la fonction y appartient à E.

2° α et β étant deux nombres réels > 0, on note $T_\alpha T_\beta$ la composée des deux applications linéaires T_α et T_β de E dans E, c'est-à-dire celle qui, à toute $f \in E$, associe la fonction $T_\alpha(T_\beta f)$. Montrer que :

$$(\alpha - \beta)\, T_\alpha T_\beta = T_\beta - T_\alpha\ .$$

En déduire que T_α et T_β commutent.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail